PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CASTILLA-LA MANCHA

JUNIO – 2013

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Puedes utilizar cualquier tipo de calculadora.

PROPUESTA A

1º) a) Enuncia el teorema de Bolzano.

b) Razona que las gráficas de las funciones $f(x)=3x^5-10x^4+10x^3+3$ y $g(x)=e^x$ se cortan en algún punto con coordenadas de abscisa entre -1 y 0.

c) Calcula los puntos de inflexión de f(x).

----

a)

El teorema de Bolzano se puede enunciar de la siguiente forma:

"Si una función f es continua en un intervalo cerrado [α, b] y en los extremos de éste toma valores de distinto signo, entonces existe al menos un valor $c \in (a,\ b)$ tal que $f(c)=0$".

b)

El punto de corte de dos funciones se obtiene de la igualación de sus expresiones. Considerando la función $h(x)=f(x)-g(x)$, que es continua en R, por ser la suma algebraica de dos funciones continuas en R, le es aplicable el teorema de Bolzano a cualquier intervalo finito que se considere.

$$h(x)=f(x)-g(x)=3x^5-10x^4+10x^3+3-e^x.$$

$$h(-1)=3\cdot(-1)^5-10\cdot(-1)^4+10\cdot(-1)^3+3-e^{-1}=-3-10-10+3-\frac{1}{e}=-20-\frac{1}{e}<0.$$

$$h(0)=3-e^0=3-1=2>0.$$

La función h(x) corta al eje de abscisas por lo menos en un punto del intervalo considerado (-1, 0), lo que equivale a decir que:

Las funciones f(x) y g(x) se cortan en algún punto del intervalo (-1, 0).

c)

La condición necesaria para que una función tenga un punto de inflexión es que se anule su segunda derivada sin que se anule la tercera derivada para los valores que anulan la segunda.

$$f'(x)=15x^4-40x^3+30x^2 \;;;\; f''(x)=60x^3-120x^2+60x \;;;\; f'''(x)=180x^2-240x+60.$$

$$f''(x)=0 \Rightarrow 60x^3-120x^2+60x=0 \;;;\; 60x(x^2-2x+1)=0 \;;;\; 60x(x-1)^2=0 \Rightarrow \underline{x_1=0} \;;;\; \underline{x_2=1}.$$

$$f'''(0)=60\neq 0 \;;;\; f'''(1)=180-240+60=0.$$

Solamente existe punto de inflexión para x = 0. $f(0)=3$.

Punto de inflexión: P(0, 3).

****

2º) Calcula el valor del parámetro $a \in R,\ a > 0$, para que el valor (en unidades de superficie) del área de la región determinada por la parábola $f(x) = -x^2 + a^2$ y el eje de abscisas, coincida con la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f(x) en el punto de abscisa x = -α.

El valor de la tangente a una función en un punto es el valor de la derivada en ese punto.

$$f'(x) = -2x \Rightarrow m = f(-a) = -2 \cdot (-a) = \underline{2a}.$$

Los puntos de corte de la parábola con el eje de abscisas son los siguientes:

$$f(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + a^2 = 0\ ;;\ x^2 = a^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{a^2} = \pm a \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -a \rightarrow \underline{A(-a,\ 0)} \\ \\ x_2 = a \rightarrow \underline{B(a,\ 0)} \end{cases}.$$

Todas las ordenadas del la parábola en el intervalo (-α, α) son positivas, por lo cual el área considerada es la siguiente:

$$S = 2a = \int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{a} (-x^2 + a^2)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + a^2 x\right]_{-a}^{a} = \left(-\frac{a^3}{3} + a^2 \cdot a\right) - \left[-\frac{(-a)^3}{3} + a^2 \cdot (-a)\right] =$$

$$= -\frac{a^3}{3} + a^3 - \frac{a^3}{3} + a^3 = 2a^3 - \frac{2a^3}{3} = \frac{4a^3}{3} = 2a\ ;;\ 4a^3 = 6a\ ;;\ 2a^3 - 3a = 0\ ;;\ a(2a^2 - 3) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{a_1 = 0},\ \underline{a_2 = -\frac{\sqrt{6}}{2}},\ \underline{a_3 = \frac{\sqrt{6}}{2}}.$$

De las soluciones obtenidas cumple la condición del problema $a \in R,\ a > 0$ únicamente la tercera.

$$\underline{\underline{a = \frac{\sqrt{6}}{2}}}.$$

****

3º) a) Encuentra dos matrices A y B cuadradas de orden 2 que cumplan:

- Su suma es la matriz identidad de orden 2.

- Al restar a la matriz A la matriz B se obtiene la traspuesta de $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

b) Si M es una matriz cuadrada de orden 2 tal que $|M| = 7$, razona cuál es el valor de los determinantes de $|M^2|$ y $|2M|$.

----

a)

Sean las matrices pedidas $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$.

$$\left.\begin{array}{l} A+B=I \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_{11}+b_{11}=1 \\ a_{12}+b_{12}=0 \\ a_{21}+b_{21}=0 \\ a_{22}+b_{22}=1 \end{cases} \\ A-B=C \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_{11}-b_{11}=1 \\ a_{12}-b_{12}=2 \\ a_{21}-b_{21}=3 \\ a_{22}-b_{22}=4 \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} 2a_{11}=2 \\ 2a_{12}=2 \\ 2a_{21}=3 \\ 2a_{22}=5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{a_{11}=1} \;;;\; \underline{b_{11}=0} \;;;\; \underline{a_{12}=1} \;;;\; \underline{b_{12}=-1} \;;;\; \underline{a_{21}=\tfrac{3}{2}} \;;;\; \underline{b_{21}=-\tfrac{3}{2}} \;;;\; \underline{a_{22}=\tfrac{5}{2}} \;;;\; \underline{b_{22}=-\tfrac{3}{2}}.$$

$$\underline{\underline{A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \; y \; B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}}}$$

b)

Teniendo en cuenta que el determinante del producto de dos matrices es igual al producto de los determinantes de las matrices:

$$|M^2| = |M \cdot M| = |M| \cdot |M| = 7 \cdot 7 = \underline{\underline{49}}.$$

Sabiendo que el producto de una matriz por un número es la matriz que resulta de multiplicar todos y cada uno de los elementos de la matriz por el número y que M es de orden 2:

$$|2M| = 2^2 \cdot |M| = 4 \cdot 7 = \underline{\underline{28}}$$

****

4º) a) Estudia la posición relativa del plano $\pi \equiv x - y - z = a$ y la recta $r \equiv \begin{cases} 2x + y + az = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$ en función del parámetro $a \in R$.

b) Calcula la distancia entre π y r para cada valor de $a \in R$.

----

a)

La recta r y el plano π determinan el sistema $\begin{cases} x - y - z = a \\ 2x + y + az = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$. Las matrices de coeficientes y ampliada del sistema son $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ y $M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & a \\ 2 & 1 & a & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

El rango de la matriz de coeficiente en función del parámetro α es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 4 - a + 1 + 2a = a + 5 = 0 \Rightarrow \underline{a = -5}.$$

Para α ≠ -5 los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada son iguales a tres, con lo cual, según el teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema es compatible determinado, es decir que la solución es única. La recta y el plano tienen un solo punto en común.

<u>Para α ≠ -5 la recta r y el plano π son secantes.</u>

Para α = -5 el rango de la matriz ampliada es el siguiente:

$$a = -5 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -5 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Rango\ M' \Rightarrow \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5 \cdot (-4 - 1) = 25 \neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\ \ M' = 3}.$$

Para α = -5 el rango de M es 2 y el rango de M’ = 3; según el teorema mencionado el sistema es incompatible. La recta y el plano no tienen ningún punto en común.

<u>Para α A -5 la recta r y el plano π son paralelos.</u>

b)

Evidentemente para α ≠ -5 la distancia entre la recta y el plano es cero por ser secantes.

Para α = -5 la recta r y el plano π son paralelos y la distancia entre ambos es equivalente a la distancia entre un punto cualquiera de la recta y el plano. Para determinar un punto de r la expresamos por unas ecuaciones paramétricas.

$$r \equiv \begin{cases} 2x + y + az = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \; y = \lambda \;;;\; x = 2\lambda \;;;\; 2 \cdot 2\lambda + \lambda + az = 0 \;;;\; az + 5\lambda = 0 \;;;\; z = -\tfrac{5}{a}\lambda \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; \underline{r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -\tfrac{5}{a}\lambda \end{cases}} \;\Rightarrow\;$$ Un punto de r es O(0, 0, 0).

La distancia de r a π es la misma que la distancia del plano π al origen de coordenadas.

La distancia del plano $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ al origen de coordenadas viene dada por la fórmula $d(O,\ \pi) = \frac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, que aplicada al plano $\pi \equiv x - y - z = -5$:

$$d(\pi,\ r) = d(O,\ \pi) = \frac{|-5|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{3}} = \underline{\underline{\frac{5\sqrt{3}}{3}\ unidades}}.$$

****

PROPUESTA B

1º) a) Calcula los valores de los parámetros $a,\ b \in R$ para que la función $f(x)=\frac{ax^2+bx}{x+1}$ tenga como asíntota oblicua la recta $y=2x+3$.

b) Para los valores encontrados, escribe la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f(x) en el punto de abscisa x = 0.

----

a)

La pendiente de una asíntota oblicua es $m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} \Rightarrow 2=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{ax^2+bx}{x+1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx}{x^2+x}=\underline{\underline{a=2}}.$$

La ordenada en el origen de una asíntota oblicua es $n=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]$:

$$n=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx] \Rightarrow 3=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+bx}{x+1}-2x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+bx-2x^2-2x}{x+1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{bx-2x}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x(b-2)}{x+1}=3 \Rightarrow b-2=3\ ;;\ \underline{\underline{b=5}}.$$

b)

La función resulta $f(x)=\frac{2x^2+5x}{x+1}$.

El punto de tangencia es $f(0)=\frac{0}{1}=0 \Rightarrow \underline{O(0,\ 0)}$.

El valor de la tangente a una función en un punto es el valor de la derivada en ese punto.

$$f'(x)=\frac{(4x+5)\cdot(x+1)-(2x^2+5x)\cdot 1}{(x+1)^2}=\frac{4x^2+4x+5x+5-2x^2-5x}{(x+1)^2}=\underline{\frac{2x^2+4x+5}{(x+1)^2}}.$$

$$m=f'(0) \Rightarrow m=\frac{5}{(1)^2}=\underline{5}.$$

La fórmula de la ecuación de una recta conocidos uno de sus puntos y la pendiente viene dada por la fórmula $y-y_0=m(x-x_0)$; aplicada al caso que nos ocupa:

$y-0=5\cdot(x-0)$.

Recta tangente: y = 5x.

****

2º) Calcula las siguientes integrales: $I_1=\int \frac{2\,sen\ x\cdot \cos x}{1+sen^2 x}\cdot dx$ e $I_2=\int \frac{x^2+x-4}{x^3-4x}\cdot dx$.

$$I_1=\int \frac{2\,sen\ x\cdot \cos x}{1+sen^2 x}\cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} 1+sen^2 x=t \\ 2\,sen\ x\cdot \cos x\cdot dx=dt \end{array} \right\} \Rightarrow \int \frac{1}{t}\cdot dt=\underline{L\,t+C}.$$

$$\underline{\underline{I_1=\int \frac{2\,sen\ x\cdot \cos x}{1+sen^2 x}\cdot dx=L\left(1+sen^2 x\right)+C}}$$

$$I_2=\int \frac{x^2+x-4}{x^3-4x}\cdot dx=\int \frac{x^2+x-4}{x\left(x^2-4\right)}\cdot dx=\int \frac{x^2+x-4}{x(x-2)(x+2)}\cdot dx.$$

$$\frac{x^2+x-4}{x(x-2)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2}=\frac{A\left(x^2-4\right)+Bx(x+2)+Cx(x-2)}{x(x-2)(x+2)}=$$

$$=\frac{Ax^2-4A+Bx^2+2Bx+Cx^2-2Cx}{x^3-4x}=\frac{x^2(A+B+C)+x(2B-2C)+-4A}{x^3-4x}\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A+B+C=1 \\ 2B-2C=1 \\ -4A=-4 \end{array} \right\} \Rightarrow \quad \to \underline{A=1}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 1+B+C=1 \\ 2B-2C=1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} B+C=0 \\ 2B-2C=1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 2B+2C=0 \\ 2B-2C=1 \end{array}\right\} \Rightarrow 4B=1\ ;;\ \underline{B=\frac{1}{4}}\ ;;\ \underline{C=-\frac{1}{4}}.$$

$$I_2=\int \frac{x^2+x-4}{x^3-4x}\,dx=\int \frac{1}{x}\cdot dx+\frac{1}{4}\int \frac{1}{x-2}\cdot dx-\frac{1}{4}\int \frac{1}{x+2}\cdot dx=L|x|+\frac{1}{4}\cdot L|x-2|-\frac{1}{4}\cdot L|x+2|.$$

$$\underline{\underline{I_2=\int \frac{x^2+x-4}{x^3-4x}\,dx=L\left(x\cdot \sqrt[4]{\left|\frac{x-2}{x+2}\right|}\right)+C}}$$

****

3º) a) Sabiendo que $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = 2$, donde $a,\ b,\ c \in R$, calcula los determinantes: $\begin{vmatrix} a-1 & b-1 & c-1 \\ a^2-1 & b^2-1 & c^2-1 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} (a+1)^2 & (b+1)^2 & (c+1)^2 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$ indicando las propiedades que usas en cada caso para justificar tu respuesta.

b) Razona que, puesto que $|A| = 2$, los parámetros α, b y c deben ser distintos entre sí (no puede haber dos iguales).

----

a)

Los determinantes tienen, entre otras, las siguientes propiedades:

Si los elementos de una línea de una matriz se descomponen en dos sumandos, su determinante es igual a la suma de los dos determinantes obtenidos al considerar por separado cada sumando de esa línea, y el resto de las líneas iguales a las del determinante inicial.

Si se multiplica o divide una línea de un determinante por un número, el valor del determinante queda multiplicado o dividido por dicho número.

Si un determinante tiene dos líneas iguales o proporcionales, su valor en cero.

Si se intercambian entre sí dos líneas de un determinante, su valor cambia de signo.

Teniendo en cuenta las propiedades anteriores:

$$\begin{vmatrix} a-1 & b-1 & c-1 \\ a^2-1 & b^2-1 & c^2-1 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 =$$

$$= 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 = \underline{\underline{10}}.$$

$$\begin{vmatrix} (a+1)^2 & (b+1)^2 & (c+1)^2 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2+2a+1 & b^2+2b+1 & c^2+2c+1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 2 = \underline{\underline{2}}.$$

b)

Para cualquiera igualdad entre los parámetros α, b y c el determinante A tendría dos columnas iguales y, en consecuencia, su valor sería cero, según una de las propiedades mencionadas en el apartado anterior, cosa que no es posible porque su valor es 2.

****

4º) a) Estudia la posición relativa de las rectas $r \equiv \begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+y-2z=1 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x-z=0 \\ x+2y-z=12 \end{cases}$.

b) Calcula la distancia entre las rectas r y s.

Vamos a realizar el estudio mediante el sistema de cuatro ecuaciones con tres incógnitas que determinan las dos rectas expresadas por ecuaciones implícitas.

El sistema que forman las rectas r y s es $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+y-2z=1 \\ x-z=0 \\ x+2y-z=12 \end{cases}$, cuyo estudio mediante el teorema de Rouché-Fröbenius se hace a continuación.

Las matrices de coeficientes y ampliada son $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $y\ M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 12 \end{pmatrix}$.

En función de los rangos de las matrices M y M’, la posición relativa de las dos rectas es la siguiente:

Rango M = Rango M’ = 2 $\Rightarrow$ (Puntos comunes) $\Rightarrow$ Son rectas coincidentes.

Rango M = 2 ;; Rango M’ = 3 $\Rightarrow$ (No hay puntos comunes) $\Rightarrow$ Son rectas paralelas.

Rango M = Rango M’ = 3 $\Rightarrow$ (Puntos comunes) $\Rightarrow$ Las rectas se cortan en un punto.

Rango M = 3 ;; Rango M’ = 4 $\Rightarrow$ (No hay puntos comunes) $\Rightarrow$ Las rectas son secantes.

Teniendo en cuenta que $\{C = -C_3\}$, rango M < 3 y rango M’ < 4.

Un menor de M es $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, el rango de M es 2.

Para estudiar el rango de M’ consideramos el menor $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 12 \end{vmatrix}$:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 12 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 12 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{Rango M' = 3.}$$

Rango M = 2 ;; Rango M’ = 3 → Las rectas r y s son paralelas.

b)

Para hallar la distancia entre las rectas $r \equiv \begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+y-2z=1 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x-z=0 \\ x+2y-z=12 \end{cases}$, en primer lugar, expresamos las rectas por ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+y-2z=1 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=1+\lambda \\ 2x+y=1+2\lambda \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -x-y=-1-\lambda \\ 2x+y=1+2\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{x=\lambda} \;;;\; y=1+\lambda-x=$$

$$r \equiv \begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+y-2z=1 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=1+\lambda \\ 2x+y=1+2\lambda \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -x-y=-1-\lambda \\ 2x+y=1+2\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{x=\lambda} \;;;\; y=1+\lambda-x=$$

$$=1+\lambda-\lambda=\underline{1=y} \Rightarrow \underline{r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=1 \\ z=\lambda \end{cases}} \Rightarrow \text{ Un punto de r es A(0, 1, 0).}$$

$$s \equiv \begin{cases} x-z=0 \\ x+2y-z=12 \end{cases} \Rightarrow \underline{x=z=\lambda} \;;;\; \lambda+2y-\lambda=12 \;;;\; \underline{y=6} \Rightarrow \underline{s \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=6 \\ z=\lambda \end{cases}}.$$

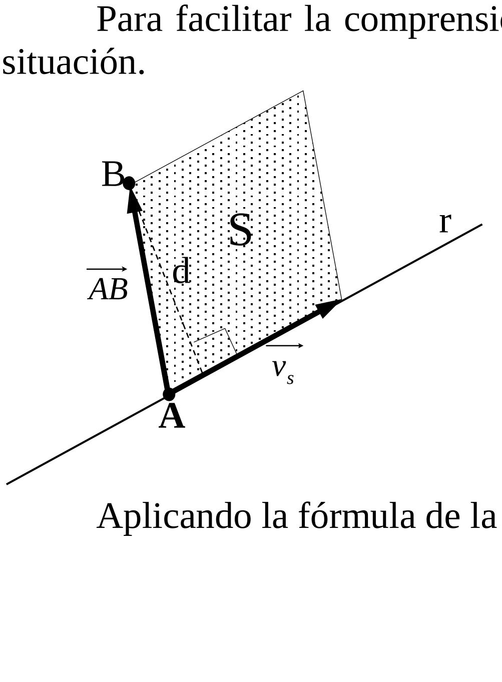
Un punto de s es B(0, 6, 0).

Curiosamente, al estar los puntos en el eje Y, la distancia es de 5 unidades.

Resolvemos el ejercicio por un procedimiento general.

La distancia d entre las rectas paralelas r y s es la misma distancia que la del punto B de la recta s a la recta r. Un vector director de la recta r es $\overrightarrow{v_r}=(1,\ 0,\ 1)$.

Para facilitar la comprensión del ejercicio hacemos un gráfico aproximado de la situación.



Teniendo en cuenta que $S=d\cdot\left|\overrightarrow{v_r}\right|$ y que también puede ser $S=\left|\overrightarrow{v_r}\wedge\overrightarrow{AB}\right|$, se deduce que la distancia es: $d(B,\ r)=\dfrac{\left|\overrightarrow{v_r}\wedge\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|}$.

$\overrightarrow{AB}=B-A=(0,\ 6,\ 0)-(0,\ 1,\ 0)=(0,\ 5,\ 0)$.

Aplicando la fórmula de la distancia:

$$d(r,\ s)=d(B,\ r)=\frac{\left|\overrightarrow{v_r}\wedge\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|}=\frac{\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \end{matrix}\right\|}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}}=\frac{|5k-5i|}{\sqrt{1+1}}=\frac{\sqrt{5^2+(-5)^2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{25+25}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{50}{2}}=\sqrt{25}=\underline{5}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{d(r,\ s)=5\ unidades}}.$$

****